# Ueber eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

# Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung der

Philosophischen Facultät der Königl. Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Sonnabend den 29. September 1877

Mittags 12 Uhr

**in der Aula Leopoldina**

öffentlich vertheidigen wird

**Georg Zickerow**

gegen die Herren Opponenten

**Hermann Thieme**, Drd. phil.

und

**Carl Freund**, cand. phys.

ACAD. LEOPOLDINA BIBL.

Breslau, 1877.

Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G., Ursulinerstrasse 1.

Herrn

**Professor Dr. H. Schröter**

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

**vom Verfasser.**

# Einleitung.

Zwei in derselben Ebene liegende projectivische Kegelschnittbüschel erzeugen im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung. Degeneriren sämmtliche Kegelschnitte der beiden Büschel in Geradenpaare, so entstehen zwei Strahlsysteme (Involutionen), welche sich in allgemein projectivischer Lage befinden. Das Erzeugniss solcher Strahlsysteme ist daher auch eine Curve vierter Ordnung; sie hat aber zwei Doppelpunkte, nämlich in den Mittelpunkten der beiden erzeugenden Strahlsysteme. Specialisirt man die Lage dieser Strahlsysteme noch dahin, dass man in die Verbindungslinie der Mittelpunkte Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen lässt, d. h. bringt man die beiden projectivischen Strahlsysteme in halbperspectivische Lage, so zerfällt das Erzeugniss in eine Gerade, den gemeinschaftlichen Strahl, und eine Curve dritter Ordnung; als solche lässt sich die Brennpunktscurve einer Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten erkennen. Von diesem Gesichtspunkte aus hat Herr Prof. Schröter [1]) das Erzeugniss der in halbperspectivischer Lage sich befindenden projectivischen Strahlsysteme untersucht. Herr Prof. Durège [2]) betrachtet den speciellen Fall, dass die Brennpunktscurve in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt, d. h. dass die erzeugenden hyperbolisch

[1]) Ueber eine besondere Curve 3. Ordnung u. s. w. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. V., p. 50 und Fortsetzung ib. Bd. VI., p. 85.

[2]) Ueber die Curve 3. Ordnung, welche den geom. Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet. Math. Ann. von Clebsch und Neumann, Bd. V., p. 83.

gleichseitigen Strahlsysteme so liegen, dass jeder der beiden Asymptoten des einen Systems die des andern entsprechen.

Im Folgenden will ich, zurückkehrend zu den allgemein projectivisch liegenden Strahlsystemen, dass Erzeugniss dieser, also die ebene Curve $C^4_{2d}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, untersuchen, und zwar einmal ausgehend von der ebenen Curve $C^3$ dritter Ordnung, welche in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten transformirt die $C^4_{2d}$ giebt, dann aber von einer Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung und erster Species, welche von gewissen Punkten aus als diese $C^4_{2d}$ projicirt werden kann.

# I.

In Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten ist jedem Punkte P ein bestimmter Punkt P′ zugeordnet, jeder Geraden g ein Kegelschnitt $K^2$, jedem Kegelschnitt $K^2$ eine Curve $C^4_{3d}$ vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten u. s. w. Nehmen die Gebilde P, g, $K^2$ u. s. w. besondere Lagen ein, so werden auch die Transformationsproducte specialisirt werden. In der That entspricht jedem Punkte der Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte des durch die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels bestimmten vollständigen Vierecks der dritte Diagonalpunkt, jeder Geraden, welche durch einen dieser drei Punkte geht, ein zerfallender Kegelschnitt. Einem Kegelschnitt, welcher durch einen Diagonalpunkt geht, gehört eine Curve $C^3_d$ dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte zu; geht der Kegelschnitt durch zwei Diagonalpunkte, so entspricht ihm wiederum ein Kegelschnitt, liegen alle drei Diagonalpunkte auf ihm, so wird er in eine Gerade transformirt. Die durch diese Transformation hergestellte geometrische Verwandtschaft ist die »Steiner'sche« genannt worden.

Nimmt man die Mittelpunkte S und $S_1$ zweier in halbperspectivischer Lage gegebenen Strahlsysteme und einen dritten Punkt O, welcher jedoch nicht ein Schnittpunkt entsprechender Strahlen sein soll, als Diagonalpunkte eines Kegelschnittbüschels, so entspricht der von den halbperspectivisch liegenden Strahlsystemen [S] und [$S_1$] erzeugten Curve $C^3$ dritter Ordnung eine Curve $C^4_{2d}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Da die $C^3$ durch die Punkte S und $S_1$ geht, so wird einem durch die Diagonalpunkte des Kegel-

schnittbüschels gelegten Kegelschnitt $K^2$ eine Gerade entsprechen, welche mit dem der $C^3$ entsprechenden Gebilde nur vier Punkte gemeinsam haben kann. Die $C^3$ wird daher in eine $C^4$ transformirt, und zwar werden für diese die Punkte S und $S_1$ Doppelpunkte sein. Eine Gerade g, welche durch S geht, schneidet die $C^3$ ausser in S noch in zwei andern Punkten. Dieser Geraden g entspricht ein zerfallender Kegelschnitt, dessen eine Gerade $g_1$ ebenfalls durch S geht, und dessen andere die Gerade $S_1O$ ist. Den beiden Punkten, die $g_1$ ausser S noch mit der $C^3$ gemeinsam hat, entsprechen zwei Punkte, die irgendwo auf g liegen; den beiden Punkten aber, die $S_1O$ ausser $S_1$ noch mit der $C^3$ gemeinsam hat, entspricht der Punkt S. Diese beiden Punkte fallen also in S zusammen; das der $C^3$ entsprechende Gebilde ist also in der That eine $C^4_{2d}$. Diese muss nun offenbar erzeugt sein durch die Gebilde, welche den die $C^3$ erzeugenden entsprechen. Die $C^3$ war der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier in halbperspectivischer Lage gegebenen Strahlsysteme. Was wird aus diesen durch die Transformation? Da jeder Geraden, die durch einen Tripelpunkt S geht, eine durch denselben Punkt S gehende Gerade entspricht, so wird auch ein Strahlsystem, dessen Centrum S ist, in ein mit diesem concentrisches Strahlsystem transformirt. Dem Strahle $SS_1$, welcher also noch durch den zweiten Diagonalpunkt $S_1$ geht, wird der Strahl SO, und dem Strahle $S_1S$ der Strahl $S_1O$ entsprechen. Die Strahlsysteme [S] und [$S_1$] verlieren also ihre halbperspectivische Lage und nehmen die allgemeine an. Wir sehen also, dass die $C^4_{2d}$ von zwei in allgemeiner Lage befindlichen projectivischen Strahlsystemen erzeugt wird.

Es ist hierbei hervorzuheben, dass die Punkte S und $S_1$ conjugirte Punkte der $C^3$ sein müssen, d. h. Punkte der Art, dass die beiden in ihnen an die $C^3$ gelegten Tangenten sich auf der $C^3$ selbst schneiden. Der dritte Diagonalpunkt O darf nie ein Punkt der $C^3$ sein, weil sonst die Transformation der halbperspectivisch liegenden Strahlsysteme nie die allgemeine Lage derselben bewirken würde. Hiernach ist

eine Construction der $C^4_{2d}$ ermöglicht, wenn eine $C^3$ und ein Kegelschnittbüschel gegeben ist, von dessen Tripelpunkten zwei zugleich conjugirte Punkte der $C^3$ sind, der dritte aber beliebig ausserhalb der $C^3$ liegt. [1])

Durch diese Steiner'sche Verwandtschaft sind wir jetzt in den Stand gesetzt, viele Eigenschaften der $C^4_{2d}$ als Analoga zu denen der $C^3$ zu erkennen. Es wird hierbei viel darauf ankommen, wie die Lage der Diagonalpunkte $S, S_1, O$ gewählt wird. Bekanntlich können von einem Punkte P ausserhalb der $C^3$ sechs Tangenten, von einem Punkte $\mathfrak{P}$ dieser Curve vier Tangenten an dieselbe gelegt werden. Verlegen wir im ersten Falle in den Punkt P den Diagonalpunkt O, im zweiten aber in den Punkt $\mathfrak{P}$ den Diagonalpunkt S oder $S_1$, so erhalten wir nach der Transformation folgende Sätze für die $C^4_{2d}$:

*Von jedem einfachen Punkte der $C^4_{2d}$ können sechs Tangenten an dieselbe gelegt werden.*

*Von jedem Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ können vier Tangenten an dieselbe gelegt werden.*

---

[1]) Der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Punktpaare, welche von zwei conjugirten Strahlenpaaren der in allgemeiner Lage befindlichen projectivischen Strahlsysteme [S] und [$S_1$] bestimmt werden, durchläuft einen Kegelschnitt. Ist dieser Kegelschnitt gegeben, so wird die Construction der $C^4_{2d}$ rein lineal. Wenn nämlich noch s t, $s_1$ $t_1$ zwei durch die Punkte resp. S, $S_1$ des Kegelschnitts beliebig gelegte Geradenpaare sind, so hat man nur den veränderlichen Punkt x den Kegelschnitt durchlaufen zu lassen, Sx, $S_1$x zu ziehen und indem man $SS_1$ und Sx, sowie s und t als je ein Paar conjugirter Strahlen eines Strahlsystems [S] betrachtet, das zugehörige Asymptotenpaar s't' zu construiren; ebenso suche man zu $S_1S$ und $S_1$x, $s_1$, $t_1$ das Asymptotenpaar $s'_1t'_1$. Die Strahlen $s't's'_1t'_1$ schneiden sich in vier Punkten der gesuchten Curve.

Noch einfacher wird die Construction der $C^4_{2d}$, wenn zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ und $K^2$ und auf jedem derselben zwei Punkte resp. $PP_1$ und $SS_1$ gegeben sind. Den den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ durchlaufenden Punkt x verbinde man mit P und $P_1$; ferner ziehe man von den beiden Schnittpunkten, in denen diese Strahlen den Kegelschnitt $K^2$ treffen, nach S und $S_1$. Diese Strahlen bilden entsprechende Strahlenpaare der die $C^4_{2d}$ erzeugenden Strahlsysteme [S] und [$S_1$].

Von besonderer Wichtigkeit werden für die zu untersuchende Curve $C^4_{2d}$ die Kegelschnitte, welche durch zwei conjugirte Punkte einer Curve dritter Ordnung gehen und diese zugleich doppelt berühren. Alle Kegelschnitte, welche $C^3$ in zwei Punkten berühren, bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten, die auf der $C^3$ selbst liegen. Von einem solchen Kegelschnittbüschel gilt nun der Satz, dass die Verbindungslinien der beiden Punkte, in denen jeder Kegelschnitt die $C^3$ noch schneidet, durch einen festen Punkt T von $C^3$ gehen. [1]) Ist nun $K^2$ ein durch die conjugirten Punkte S und $S_1$ gehender Kegelschnitt, der in A und B die $C^3$ berührt, so treffen alle Kegelschnitte des durch A, B bestimmten Büschels die Curve in zwei Punkten, deren Verbindungslinien durch den Punkt

$$T = (\overline{SS_1},\ C^3)$$

gehen. Ein anderer Kegelschnitt desselben Büschels ist die doppelt gezählte Gerade AB. Schneidet diese die $C^3$ noch in P, so muss die Tangente in P an $C^3$ auch durch T gehen. Legt man umgekehrt von T eine Tangente an $C^3$, welche in P berühren mag und durch P eine beliebige Gerade, welche $C^3$ noch in A und B treffe, so wird ein Kegelschnitt, welcher $C^3$ in A und B berührt und ausserdem durch S geht, auch durch $S_1$ gehen. Denn wir haben dann wiederum durch A und B ein Kegelschnittbüschel, welches durch vier feste Punkte von $C^3$ geht. Die Verbindungslinien der beiden Punkte, in denen jeder Kegelschnitt die $C^3$ noch schneidet, müssen durch den festen Punkt T gehen; denn da die doppelt gezählte Gerade AB ein solcher Kegelschnitt ist, ist T dieser feste Punkt. Ist nun S einer der beiden Schnittpunkte von einem beliebigen $K^2$ jenes Büschels und der $C^3$, so muss also

$$S_1 = (\overline{TS},\ C^3)$$

der andere Schnittpunkt von $K^2$ und $C^3$ sein. Lassen wir nun PAB sich um P drehen, so erhalten wir jedesmal zwei

---

[1]) J. Steiner's Vorlesungen über synth. Geometrie. II. Theil. Bearb. von H. Schröter, 2. Auflage, p. 507. Leipzig 1876.

Punkte A und B, welche so beschaffen sind, dass ein Kegelschnitt, welcher durch S, $S_1$, A und B geht und die $C^3$ in A berührt, diese Curve auch in B berühren muss. Diese Kegelschnitte gehören offenbar zu dem System derjenigen Kegelschnitte, welche S und $S_1$ mit je einem Paare A, B verbinden. Zu jedem Paare A, B gehören aber die Kegelschnitte eines Büschels. Die sämmtlichen Kegelschnittbüschel, welche hier auftreten, bilden ein Kegelschnittnetz, d. h. je zwei dieser Kegelschnittbüschel haben einen Kegelschnitt gemeinsam.

Ist nämlich PA'B' irgend eine andere Gerade durch P, so muss ein durch S, $S_1$, A, B, A' gelegter Kegelschnitt auch durch B' gehen. Denn die Kegelschnitte des durch die vier festen Punkte S, $S_1$, A, B bestimmten Büschels schneiden die $C^3$ noch in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt von $C^3$ gehen. Nun ist unter diesen Kegelschnitten auch derjenige, welcher $C^3$ in S und $S_1$ schneidet und in A und B berührt, also ausserdem noch in A und B schneidet. Jener feste Punkt, in welchem sich die Verbindungslinien aller dritten Paare von Schnittpunkten der Kegelschnitte des Büschels ($SS_1AB$) und der $C^3$ begegnen, ist daher der Punkt, in welchem AB die $C^3$ noch trifft, d. h. P, woraus folgt, dass jener Kegelschnitt auch durch B' gehen muss. Alle jene Kegelschnitte bilden also ein Netz. Die Kegelschnitte aber, welche einem Netze angehören und durch einen beliebigen Punkt O gehen, bilden ein Büschel. In dem vorliegenden Netze werden die Kegelschnitte, welche durch einen Punkt O gehen, der beliebig aber ausserhalb der $C^3$ gewählt sein möge, ein Büschel bilden, zu dessen Basispunkten ausser S, $S_1$ und O noch ein vierter im Allgemeinen auch ausserhalb der $C^3$ liegender Punkt Q gehört.

Es fragt sich nun, wie viel Kegelschnitte giebt es in diesem Büschel, welche $C^3$ doppelt berühren. Nach dem Vorhergehenden muss jeder Kegelschnitt dieses Büschels, welcher die $C^3$ einmal berührt, auch doppelt berühren und zwar so, dass die beiden Berührungspunkte A und B mit dem Punkte P in gerader Linie liegen.

Den besonderen Fall, in welchem die beiden Punkte A und B coincidiren, können wir vorläufig ausser Acht lassen, da die doppelte Berührung hierbei aufhört; unten werden wir sogleich auch diesen Fall näher betrachten.

Um nun zu erfahren, wieviel unter den durch S, $S_1$, O, Q gehenden Kegelschnitten die $C^3$ im Allgemeinen berühren, transformiren wir unsere ganze Figur in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel, dessen Tripelpunkte S, $S_1$ und O sind. Dann entspricht der $C^3$ eine $C^4_{2d}$ mit Doppelpunkten in S und $S_1$ und einem einfachen Punkte in O. Den Kegelschnitten durch S, $S_1$, O, Q entsprechen gerade Linien, welche durch den Q entsprechenden Punkt Q′ gehen. Von diesen Geraden wissen wir also, dass sie mit vier Ausnahmen die $C^4_{2d}$ doppelt berühren, sobald sie diese Curve einmal berühren. Da nun durch Q′ an $C^4_{2d}$ im Allgemeinen acht Tangenten gelegt werden können, vier jedoch wegfallen müssen, die andern vier aber offenbar zu je zwei zusammen fallen, so gehen also durch Q′ zwei Doppeltangenten an die Curve $C^4_{2d}$. Statt der Tangente TP von T an $C^3$ hätten wir auch jede der drei andern von T an $C^3$ construirbaren Tangenten zum Ausgangspunkt unserer Untersuchung wählen können, jede derselben hätte zwei Doppeltangenten geliefert.[1])

Den beiden Doppeltangenten von Q′ entsprechen zwei Kegelschnitte, welche durch S und $S_1$ gehen und die $C^3$ doppelt berühren resp. in den Punkten A, B und A′, B′. Wir haben aber gesehen, dass ein Kegelschnitt, der durch A, B, S, $S_1$ und A′ geht, auch den Punkt B′ enthält. Jeder Kegelschnitt, der durch S und $S_1$ geht, wird in Bezug auf das Kegelschnittbüschel mit den Tripelpunkten S, $S_1$, O wiederum in einen durch S und $S_1$ gehenden Kegelschnitt transformirt. Denn man hat sich nur den ursprünglichen Kegelschnitt von zwei projectivischen Strahlbüscheln (S) und ($S_1$) erzeugt zu denken. Diese werden nach der Transfor-

[1]) cfr. C. Küpper, Beiträge zur Theorie der Curven 3. und 4. Ordnung. Abhandlungen der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. VI. Folge, 5. Band. Prag 1872.

mation wieder als Strahlbüschel in S und $S_1$ erscheinen, also wiederum einen durch S und $S_1$ gehenden Kegelschnitt erzeugen. Hiernach liegen also auch die Berührungspunkte der beiden von Q' ausgehenden Doppeltangenten mit S und $S_1$ auf einem Kegelschnitt; wir haben daher das Resultat:

*Die Curve $C^4_{2d}$ besitzt acht Doppeltangenten, welche in vier Gruppen zu je zwei in der Art zerfallen, dass die vier Berührungspunkte der beiden Doppeltangenten einer Gruppe mit den beiden Doppelpunkten der $C^4_{2d}$ auf einem Kegelschnitte liegen.*

Es ist noch das Zusammenfallen der Punkte A, B zu betrachten. Die Kegelschnitte, welche dem Büschel $(SS_1OQ)$ angehören und für welche die Punkte A, B coincidiren, schneiden die $C^3$ noch in je zwei Punkten, welche mit T in einer Geraden liegen. Da es nun vier Tangenten von P aus an die $C^3$ giebt, so können auch in dem Kegelschnittbüschel $(SS_1OQ)$ vier Kegelschnitte construirt werden, welche durch S, $S_1$ gehen, die $C^3$ einmal berühren und ausserdem dieselbe Curve noch in je 2 Punkten treffen, deren Verbindungslinie die Gerade $SS_1$ in einem Punkte der $C^3$ schneidet. Transformiren wir nun auch dieses Gebilde und bedenken, dass jeder durch T gehenden Geraden g ein Kegelschnitt entspricht, welcher in den beiden den Schnittpunkten von g und $C^3$ entsprechenden Punkten die $C^4_{2d}$ schneidet, durch die Doppelpunkte S und $S_1$ geht und ferner die Curve in O berührt, so ist folgendes ersichtlich:

*Legt man von den vier Punkten, in welchen sich die Doppeltangenten einer Gruppe der $C^4_{2d}$ treffen, die noch möglichen vier einfachen Tangenten, so schneiden diese die Curve je in zwei Punkten, welche mit den Doppelpunkten und einem Punkte O der Curve auf sechzehn Kegelschnitten liegen, die sämmtlich die $C^4_{2d}$ in diesem Punkte O berühren.*

In dem Kegelschnittbüschel $(T^2)$, welches dem Strahlbüschel (T) entspricht und aus Kegelschnitten besteht, die sämmtlich durch die beiden Doppelpunkte gehen und in

einem Punkte O die $C^4_{2d}$ und also auch sich unter einander berühren, giebt es vier Kegelschnitte, welche die $C^4_{2d}$ noch in einem weiteren Punkte resp. $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ berühren. Diese vier doppelt berührenden Kegelschnitte entsprechen den von T aus an die $C^3$ gelegten Tangenten. Es liegen aber bekanntlich die Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Punkte T auf einem Kegelschnitt, welcher die $C^3$ ausserdem in T berührt. Die diesem Kegelschnitt entsprechende $C^4_{3d}$ mit Doppelpunkten in S, $S_1$ und O berührt also die $C^4_{2d}$ in O und geht durch die Punkte $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$. Jeder dieser vier Punkte P kann mit den Punkten S, $S_1$, O als Basispunkt eines Kegelschnittbüschels angesehen werden, in welchem es stets zwei Kegelschnitte giebt, die zugleich durch die Berührungspunkte $a^1_1 b^1_1$ resp. $a^1_2 b^1_2$ zweier zu einer Gruppe gehörigen Doppeltangenten gehen. Es lässt sich daher von der Lage der 16 Berührungspunkte der Doppeltangenten Folgendes aussprechen:

*Berühren die vier Paare Doppeltangenten die $C^4_{2d}$ in den Punkten resp.*

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a^1_1 & b^1_1 & a^2_1 & b^2_1 & a^3_1 & b^3_1 & a^4_1 & b^4_1 \\ a^1_2 & b^1_2 & a^2_2 & b^2_2 & a^3_2 & b^3_2 & a^4_2 & b^4_2 \end{array}$$

*und legt man durch die beiden Doppelpunkte S und $S_1$ und durch je eines dieser acht Punktpaare a, b alle möglichen Kegelschnitte, so giebt es in dem Büschel $(a^1_1 b^1_1 S S_1)$ einen Kegelschnitt, welcher einen dem Büschel $(a^1_2 b^1_2 S S_1)$ zugehörigen Kegelschnitt in zwei Punkten O und $P'_1$ trifft, die auf der $C^4_{2d}$ liegen; ebenso giebt es zwei Kegelschnitte, die der zweiten Gruppe $a^2_1 b^2_1$, $a^2_2 b^2_2$ angehören und sich in den Punkten O und $P'_2$ treffen; analog sind noch die Punkte $P'_3$ und $P'_4$ bestimmt. Diese vier Punkte P liegen mit S, $S_1$, O auf einer $C^4_{3d}$ mit Doppelpunkten in S, $S_1$, O, welche $C^4_{2d}$ in O berührt. Unter den Kegelschnitten, die durch S, $S_1$ gehen und in O die $C^4_{2d}$ berühren, giebt es vier Kegelschnitte, welche diese Curve ausserdem noch ein-*

*mal berühren. Die Berührungspunkte dieser vier Kegelschnitte sind wiederum die Punkte* $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$.

Die sämmtlichen Kegelschnitte, welche durch die Punkte S und $S_1$ gehen und die $C^3$ doppelt berühren, bilden vier Gruppen der Art, dass die Berührungspunkte der Kegelschnitte einer Gruppe allemal in gerader Linie liegen mit einem Punkte P, welcher einer der vier Berührungspunkte der von T an die $C^3$ gelegten Tangenten ist; T ist der Punkt, welchen die Verbindungslinie der beiden conjugirten Punkte S und $S_1$ auf der $C^3$ ausschneidet. Jede dieser Gruppen ist als Kegelschnittbüschel anzusehen, von dessen Basispunkten zwei reell, zwei imaginär sind. Denkt man sich die $C^3$ von einem solchen Büschel $(B^2)$ von Berührungskegelschnitten und dem zugehörigen Strahlbüschel (P) erzeugt, so stellt das durch Transformation dieser Figur erhaltene Bild eine specielle Erzeugung unserer $C^4_{2d}$ dar. Denn von den unendlich vielen Arten, auf welche diese Curve durch zwei Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinschaftlichen Basispunkten erzeugt werden kann, ist hier diejenige ausgewählt, welche den Kegelschnitten des einen Büschels noch die Eigenschaft, die $C^4_{2d}$ doppelt zu berühren, beilegt. Construirt man in einem der Berührungspunkte der die $C^3$ in S, $S_1$ schneidenden und ausserdem doppelt berührenden Kegelschnitte die Tangente an die $C^3$, so schneidet dieselbe die Curve in noch einem Punkte p. Von p aus können aber noch drei Tangenten an $C^3$ gehen, deren Berührungspunkte mit p verbunden drei andere demselben Büschel doppelt berührender Kegelschnitte angehörende Kegelschnitte bestimmen. Transformiren wir jetzt und erinnern wir uns daran, dass ein Kegelschnitt, welcher durch zwei Tripelpunkte geht, wieder als Kegelschnitt durch dieselben Punkte erscheint, so erhalten wir, da es vier Punkte P giebt, das Resultat:

*Durch die Doppelpunkte und zwei beliebige Punkte* $(p, O)$ *der* $C^4_{2d}$ *können stets vier Kegelschnitte* $K^2_1$ *ge-*

*legt werden, welche die Curve in noch einem Punkte A einfach berühren. In jedem dieser Berührungspunkte berühren die Curve noch vier andere Kegelschnitte $K_2^2$, welche durch die Doppelpunkte gehen und ausserdem die Curve je in einem Punkte B zum zweiten Male berühren. Die zu ein und demselben Kegelschnitt gehörigen beiden Berührungspunkte dieser doppelt berührenden Kegelschnitte liegen mit den Doppelpunkten und dem einen der anfangs beliebig gewählten Punkte (O) je auf einem Kegelschnitt $K_3^2$ der Art, dass die vier Kegelschnitte $K_3^2$, welche durch einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt der vier Kegelschnitte $K_2^2$ gehen, sich alle in einem einzigen Punkte P der $C_{2d}^4$ schneiden. Solcher Punkte P giebt es vier; sie liegen wieder mit dem Punkte O und den Doppelpunkten auf einer $C_{3d}^4$, welche in O, S, $S_1$ Doppelpunkte hat und in O die $C_{2d}^4$ berührt.*

Die von dem Punkte $P_1$ aus durch die $C^3$ gezogenen Geraden bestimmten auf dieser Curve zwei Punkte $A_1 B_1$ der Art, dass ein durch $SS_1 A_1 B_1$ gelegter Kegelschnitt, der die $C^3$ in $A_1$ berührte, diese gleichzeitig in $B_1$ berührte. Verbindet man $A_1$ mit den drei Punkten $P_2$, $P_3$, $P_4$, so schneiden diese Geraden die Curve noch in den Punkten $B_2$, $B_3$, $B_4$, welche zu $A_1$ so liegen, dass ein durch S, $S_1$, $A_1$ und resp. $B_2$, $B_3$, $B_4$ gehender Kegelschnitt, der in $A_1$ die $C^3$ berührt, auch zugleich in resp. $B_2$, $B_3$, $B_4$ berührt. Da diese doppelt berührenden Kegelschnitte nach der Transformation wieder als solche erscheinen, so haben wir den Satz:

*Durch die Doppelpunkte und einen beliebigen einfachen Punkt einer $C_{2d}^4$ können stets vier Kegelschnitte gelegt werden, welche die Curve ausser in diesem beliebig gewählten Punkte noch in einem andern Punkte berühren.*

*Legt man durch die Doppelpunkte $SS_1$ der $C_{2d}^4$ und durch die Berührungspunkte $A_1 B_1$ eines jener vier doppelt berührenden Kegelschnitte einen beliebigen*

*Kegelschnitt, welcher in O und $P_1$ die $C^4_{2d}$ schneiden mag, so treffen die drei Kegelschnitte, welche durch O, S, $S_1$, $A_1$ und resp. $B_2$, $B_3$, $B_4$ bestimmt sind, die Curve noch in drei Punkten resp. $P_2$, $P_3$, $P_4$; diese liegen mit $P_1$ und O auf einer $C^4_{3d}$, welche in S, $S_1$, O Doppelpunkte hat und in O die $C^4_{2d}$ berührt.*

Wenden wir uns jetzt zu den durch die Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ gehenden Kegelschnitten, welche die Curve osculiren, so giebt uns auch über das Verhalten dieser Kegelschnitte das bisher benutzte Transformationsprincip Aufschluss. Wir gehen daher wieder auf die Curve $C^3$ dritter Ordnung zurück und suchen nach dem hierhergehörigen Analogon. Bekanntlich schneiden die Kegelschnitte eines Büschels, dessen vier Basispunkte auf einer $C^3$ liegen, diese in zwei Punkten der Art, dass die Verbindungslinien derselben sich in einem Punkte der $C^3$, dem Gegenpunkte [1]) der vier Basispunkte, schneiden. Nehmen wir zu Basispunkten zwei conjugirte Punkte $SS_1$ und zwei beliebige Punkte xy, und transformiren das ganze Gebilde in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel, dessen Tripelpunkte $SS_1$ und ein ausserhalb der $C^3$ liegender Punkt O ist, so erhalten wir folgenden Satz:

*Die Kegelschnitte des durch die Doppelpunkte und zwei beliebige Punkte xy einer $C^4_{2d}$ bestimmten Büschels schneiden die Curve noch in je einem Punktpaare. Legt man durch einen andern beliebig aber ein für alle Mal bestimmten Punkt O der Curve, ferner durch die Doppelpunkte und je eines jener Punktpaare Kegelschnitte, so schneiden sich diese sämmtlich in einem Punkte G, welcher auch auf der $C^4_{2d}$ liegt.*

Ebenso wie durch die Punkte x, y, O der Punkt G, resp. durch x, y, G der Punkt O bestimmt ist, so wird auch durch O, G, x der Punkt y, resp. durch O, G, y der Punkt x definirt. Sobald also ein Punktpaar xy festgelegt ist, ist

---

[1]) Cremona, Ebene Curven. No. 65. Deutsch von M. Curtze. Greifswald 1865.

in Bezug auf dieses durch die obige Construction jedem andern Punkte O ein einziger Punkt G zugeordnet; wir wollen der Kürze halber sagen: G ist zu O in Bezug auf xy adjungirt. Diese Zusammengehörigkeit von Punkten der $C^4_{2d}$ ist für die Kegelschnitte, welche durch die Doppelpunkte gehen und die Curve osculiren, von Bedeutung. Von den Kegelschnitten nämlich, welche eine Curve dritter Ordnung in einem Punkte a osculiren und in drei Punkten u, v, w schneiden, ist bekannt, dass der Gegenpunkt dieser vier Punkte Tangentialpunkt des Osculationspunktes ist. Nehmen wir statt u und v conjugirte Punkte S und $S_1$ und lassen diese sowie einen ausserhalb der $C^3$ liegenden Punkt O Tripelpunkte eines Kegelschnittbüschels sein, so erhellt nach der Transformation in Bezug auf dieses Kegelschnittbüschel Folgendes: Wenn ein durch die Doppelpunkte $SS_1$ einer $C^4_{2d}$ gehender Kegelschnitt die Curve in einem Punkte a osculirt und in einem andern Punkte b schneidet, so ist zu einem beliebigen Punkte c ein Punkt d der Art in Bezug auf ad adjungirt, dass der durch die Punkte S, $S_1$, a, c, d bestimmte Kegelschnitt die $C^4_{2d}$ in a berührt. Hieraus folgt nun für die durch die Doppelpunkte gehenden und die Curve osculirenden Kegelschnitte folgende Bedingung:

> *Ein durch die Doppelpunkte und zwei beliebige Punkte a, b einer $C^4_{2d}$ gehender Kegelschnitt osculirt die Curve in einem dieser beiden Punkte, wenn der zu einem andern beliebigen Punkt c in Bezug auf ab adjungirte Punkt d so gelegen ist, dass der durch S, $S_1$, c, d und einen der Punkte a oder b bestimmte Kegelschnitt die Curve in demselben Punkte a resp. b berührt.*

Schliesslich können wir aus den bekannten Eigenschaften der Wendepunkte der $C^3$ sofort die Anzahl derjenigen osculirenden Kegelschnitte ablesen, welche durch die Doppelpunkte und einen beliebigen Punkt der $C^4_{2d}$ gehen. Denn durch drei beliebige Punkte der $C^3$ können ja stets neun und nur neun Osculationskegelschnitte gelegt werden; ihre

Berührungspunkte sind die Wendepunkte. Nehmen wir als zwei der beliebig zu wählenden Punkte zwei conjugirte Punkte und diese sowohl wie einen ausserhalb der $C^3$ liegenden Punkt O zu Tripelpunkten eines Kegelschnittbüschels, so erhalten wir durch Transformation in Bezug auf dieses folgenden Satz:

*Durch die Doppelpunkte und einen beliebigen Punkt der $C^4_{2\delta}$ können stets neun Kegelschnitte gelegt werden, welche die Curve in einem andern Punkte osculiren.*

## II.

Projicirt man die Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung und erster Species [1]) von einem beliebigen Punkte des Raumes aus auf eine Ebene, so erhält man eine Curve $C^4_{2d}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Diese $C^4_{2d}$ ist aber keineswegs immer das Erzeugniss zweier allgemein projectivischer Strahlsysteme. Es wird also der Ort der Punkte, von denen aus die $R^4$ als unsere $C^4_{2d}$ projicirt wird, aufzusuchen sein.

Wegen ihrer principiellen Bedeutung wollen wir jedoch vorher die Frage erledigen, ob die $C^4_{2d}$ stets als Projection einer Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung und erster Species angesehen werden darf. Wir setzen voraus, dass die vorliegende $C^4_{2d}$ aus einer $C^3$ durch Transformation in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel entstanden ist. Dann kann unsere $C^4_{2d}$ von zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln, die zwei Basispunkte gemeinschaftlich haben, auf unendlich vielfache Weise erzeugt werden. Denn die Curve dritter Ordnung, aus der die $C^4_{2d}$ durch Transformation entstanden, kann auf unzählige Arten von einem Strahlbüschel (U) und einem zu diesem projectivischen Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Transformirt man dieses Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten $SS_1PP_1$ in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den Tripelpunkten $SS_1O$, wo O ein beliebiger, nicht auf $C^3$ liegender Punkt ist, so entspricht jenem erzeugenden Kegelschnittbüschel wiederum ein Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten $SS_1QQ_1$, wo $QQ_1$ die den Punkten $PP_1$ entsprechenden sind und auf der $C^4_{2d}$ liegen,

[1]) Reye, Geometrie der Lage. II., p. 255. Hannover 1868.

welche ja der $C^3$ entspricht. Das Strahlbüschel (U) wird auch in ein Kegelschnittbüschel transformirt, und zwar mit den Basispunkten $S\,S_1\,O\,U_1$, wo $U_1$ dem Punkte U entspricht und auch auf der $C^4_{2d}$ liegt. Die beiden unsere Curve erzeugenden Kegelschnittbüschel haben also zwei Basispunkte, S und $S_1$, gemeinschaftlich. In gleicher Weise aber wie das Strahlbüschel (U) auf das Kegelschnittbüschel $(SS_1PP_1)$ projectivisch bezogen war, so dass es die $C^3$ erzeugte, ebenso sind die beiden Kegelschnittbüschel $(SS_1OU_1)$ und $(SS_1QQ_1)$ der Art projectivisch einander zugeordnet, dass je zwei entsprechende Kegelschnitte sich ausser in S und $S_1$ noch in zwei Punkten der $C^4_{2d}$ schneiden. Nun war bei der Erzeugung der $C^3$ die Wahl der Punkte P und $P_1$, sowie später die des Punktes O ganz willkürlich; also ist ersichtlich, dass auch die $C^4_{2d}$ auf unendlich vielfache Weise durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel, die zwei gemeinschaftliche Basispunkte haben, erzeugt werden kann.

Verbindet man die beiden Doppelpunkte S und $S_1$ mit einem beliebigen Punkte P des Raumes durch gerade Linien, so kann man stets eine Fläche $F^2$ zweiter Ordnung so construiren, dass sie die Geraden PS und $PS_1$ enthält. Projiciren wir jetzt die $C^4_{2d}$ von P aus auf $F^2$, so hat dieser Projectionskegel mit $F^2$ ausser den Geraden PS und $PS_1$ eine Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung gemeinsam. Denn jede Ebene schneidet diesen Kegel in einer $c^4_{2d}$ und $F^2$ in einem Kegelschnitt, welcher durch die Doppelpunkte von $c^4_{2d}$ geht, also mit dieser Curve ausserdem noch vier Punkte gemeinschaftlich hat. Dass diese Raumcurve vierter Ordnung auch erster Species ist, folgt daraus, dass sich durch dieselbe noch unendlich viele Flächen $F^2$ zweiter Ordnung legen lassen. Es werden nämlich die sämmtlichen Kegelschnitte $K^2$ der beiden projectivischen Kegelschnittbüschel, von denen wir die $C^4_{2d}$ erzeugt werden liessen, auf $F^2$ wieder als Kegelschnitte $K^2_1$ projicirt. Denn jeder Projectionskegel eines solchen Kegelschnittes $K^2$ hat mit der Fläche $F^2$ eine Raumcurve vierter Ordnung gemeinsam, die in zwei Kegelschnitte $K^2_1$ und $K^2_2$ zerfällt, von denen wieder $K^2_2$ der von den

Geraden PS und $PS_1$ gebildete zerfallende Kegelschnitt ist. Diese Geraden sind demnach als Projectionsstrahlen anzusehen und die eigentliche Projection jedes Kegelschnittes $K^2$ der die $C^4_{2d}$ erzeugenden Büschel wird also wieder ein Kegelschnitt $K^2_1$. Die Kegelschnitte $K^2$ jedes der beiden Büschel gehen aber ausser durch S und $S_1$ noch durch je zwei Punkte der $C^4_{2d}$, also projiciren sie sich als Kegelschnitte $K^2_1$, die durch je zwei Punkte der Raumcurve $R^4$ gehen. Die beiden Systeme von Kegelschnitten $K^2_1$ erzeugen offenbar die $R^4$, ihre Ebenen aber bilden zwei projectivische Ebenenbüschel; also erzeugen sie eine neue Fläche $F^2$ zweiter Ordnung, welche ebenfalls durch $R^4$ geht; denn die Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen geht jedes Mal durch die Schnittpunkte zweier entsprechenden Kegelschnitte der beiden Systeme. Je nach der Lage der die $C^4_{2d}$ erzeugenden Büschel wird man zwei Ebenenbüschel erhalten, welche alle $F^2$ des Flächenbüschels, dessen Basiscurve $R^4$ ist, erzeugen. Es ist somit gezeigt, dass jede ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten als Projection einer Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung und erster Species aufgefasst werden darf. Wir sind also berechtigt, alle Resultate, welche wir für eine $C^4_{2d}$ unter der Voraussetzung, dass sie die Projection einer Raumcurve $R^4$ sei, ableiten, auf jede beliebige $C^4_{2d}$ zu übertragen, also auch auf eine solche, die das Erzeugniss zweier projectivischen Strahlsysteme ist.

Wir wollen jetzt die bereits angedeutete Fundamentalfrage erörtern: Welcher Art ist der Ort der Punkte, von denen aus die $R^4$ in eine $C^4_{2d}$, welche zugleich das Ergebniss zweier projectivischen Strahlsysteme ist, projicirt wird?

Nehmen wir zunächst an, die vorliegende $C^4_{2d}$ sei sowohl die Projection einer $R^4$ als auch das Erzeugniss projectivischer Strahlsysteme, so muss offenbar der Projectionskegel $K^4_{2d}$ das Erzeugniss projectivischer Ebenensysteme sein, deren Axen die von einem Punkte P ausgehenden Secanten a und $\alpha$ der Raumcurve sind. Um nun zu erkennen, dass dieser

Punkt P eine besondere Lage habe, wollen wir die durch P und $R^4$ bestimmte Fläche $G^2$ zweiter Ordnung näher betrachten. Jeder durch a gehenden Ebene des Systems [a] entspricht ein Ebenenpaar des Systems [$\alpha$]; und zwar trifft eine durch a gelegte Ebene die $R^4$ in den Punkten x und y, so bilden (x$\alpha$) und (y$\alpha$) dieses entsprechende Paar. Die Ebene (x$\alpha$) treffe $R^4$ noch in x', und (y$\alpha$) in y'; dann müssen in Folge der Projectivität der Ebenensysteme auch x' und y' mit a in ein und derselben Ebene liegen. Auf $G^2$ liegen daher die Geraden

$$a,\ \alpha,\ x'y',\ xx',\ yy',\ xy.$$

Es wird also durch diese beliebig herausgegriffenen Ebenenpaare ein Viereck (xyx'y') bestimmt, dessen vier Ecken Punkte der $R^4$ sind und von dessen Seiten vier auf der durch P und diese $R^4$ bestimmten Fläche $G^2$ liegen. Solcher Vierecke giebt es also unendlich viele auf $R^4$ und demgemäss Vierseite auf $G^2$. Es muss also, wenn $R^4$ in unsere $C^4_{2d}$ projicirt werden soll, das Projectionscentrum P auf einer Fläche $G^2$ liegen, welche durch $R^4$ geht und die Eigenschaft hat, dass auf ihr je vier Seiten der unendlich vielen $R^4$ einbeschriebenen Vierecke liegen.

Da nicht jede durch $R^4$ gehende Fläche zweiter Ordnung diese Eigenschaft hat, so fragt es sich jetzt, wie viele solcher Flächen $G^2$ überhaupt vorhanden sind. Diese Frage reduciren wir auf folgende: Wie viel Kegelschnitte giebt es in einem Büschel der Art, dass vier Ecken der ihnen umbeschriebenen Vierseite auf einem festen Kegelschnitte des Büschels liegen?

Bekanntlich giebt es in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung vier Punkte, deren Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Büschels je in eine Ebene coincidiren. Nehmen wir nun als Projectionsebene diese Polarebene eines Quadrupelpunktes und als Projectionscentrum diesen Punkt selbst, so wird das Flächenbüschel, dessen Basiscurve $R^4$ ist, als Kegelschnittbüschel projicirt; die Grundpunkte desselben

sind die Schnittpunkte der Raumcurve und der Projectionsebene. Aus der $R^4$ aber wird ein Kegelschnitt $r^2$ dieses Büschels selbst und zwar derjenige festliegende, welcher die Ecken jener Vierecke enthält. Die Flächen $G^2$ werden auch als Kegelschnitte $g^2$ des Büschels projicirt, jedoch als solche, welche von den Sehnenvierecken jenes festliegenden Kegelschnittes $r^2$ umhüllt werden. Wenn aber zwei Kegelschnitte so liegen, dass dem einen Vierecke einbeschrieben werden können, welche zugleich dem andern umbeschrieben sind, so gehen die Geraden, welche die gegenüberliegenden Ecken, sowie diejenigen, welche die Berührungspunkte auf gegenüberliegenden Seiten verbinden, sämmtlich durch einen Punkt, welcher in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare hat. [1])

Um nun die Anzahl der Kegelschnitte zu ermitteln, welche in dem Büschel derartig zu $r^2$ liegen, dass die Diagonalen der betreffenden Vierecke durch einen Tripelpunkt gehen, haben wir nur nöthig, von einem Punkte von $r^2$ Tangentenpaare an alle Kegelschnitte des Büschels zu legen, die Schnittpunkte dieser Tangenten auf dem ersten Kegelschnitt $r^2$ zu verbinden und nachzusehen, wie viele solcher Verbindungslinien durch einen der Tripelpunkte von $r^2$ gehen. Diese Verbindungslinien umhüllen aber einen Kegelschnitt $g^2$. Dies erkennt man sehr leicht aus Folgendem: Von einem Punkte P des Kegelschnittes $r^2$ gehen an irgend einen Kegelschnitt $k^2$ des betrachteten Büschels zwei Tangenten, welche $r^2$ in Q und S treffen mögen. Jede von ihnen wird aber im Allgemeinen von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt, also wird auch PQ ausser von $k^2$ noch von einem andern Kegelschnitt $k_1^2$ berührt. Trifft nun die von P an $k_1^2$ gelegte zweite Tangente den Kegelschnitt $r^2$ in T, so sind QS und QT zwei der gesuchten Verbindungslinien. Da die Lage von Q so willkürlich wie die Wahl von P war, so erkennen wir, dass durch jeden Punkt des

[1]) J. Rosanes und M. Pasch, Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon; Crelle's Journ. Bd. 64.

Kegelschnittes $r^2$ zwei der gesuchten Verbindungslinien gehen; aber auch nicht mehr, denn sonst müssten, wie man bald sieht, von den Kegelschnitten eines Büschels mehr als zwei ein und dieselbe Gerade berühren. Da also von einem Punkte nur zwei Tangenten an die gesuchte Curve gehen, so ist diese zweiter Klasse, d. h. ein Kegelschnitt. Da ferner von den Tangenten eines Kegelschnittes stets zwei durch einen Tripelpunkt gehen, so erhalten wir für die drei Tripelpunkte des Büschels sechs solcher Verbindungslinien. Jeder derselben entspricht ein Kegelschnitt $g^2$ des Büschels und im Raume eine der gesuchten Flächen $G^2$, so dass wir folgendes Resultat haben:

> *Der Ort der Punkte, von denen aus eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species als eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, die zugleich das Erzeugniss zweier projectivischen Strahlsysteme ist, projicirt wird, besteht aus sechs Flächen eines Büschels zweiter Ordnung, dessen Basiscurve die anfangs genannte Raumcurve ist.*

Da der Kegel $K_{2d}^4$, welcher $R^4$ von P aus als $C_{2d}^4$ projicirt, das Erzeugniss projectivischer Ebenensysteme ist, so werden je zwei entsprechende Ebenenpaare vollständige Vierkante bilden, deren Kanten Kegelseiten, d. h. Projectionsstrahlen sind. Sind a und $\alpha$ die Axen der Ebenensysteme, so entspricht demjenigen Ebenenpaar $EE_1$ des Systems [a], deren eine Ebene E die durch a und $\alpha$ bestimmte ist, ein Ebenenpaar des Systems [$\alpha$], welches durch $\alpha$ und die beiden Punkte x und y bestimmt ist, in denen $E_1$ die $R^4$ trifft und die nicht auf a liegen. Die Ebenen $(\alpha x)$ und $(\alpha y)$ sind daher die beiden Tangentialebenen an $K_{2d}^4$ längs $\alpha$. Aus der Projectivität der Ebenensysteme folgt also, dass die längs eines der Doppelstrahlen von $K_{2d}^4$ an diesen Kegel gelegten Tangentialebenen denselben noch in je einem Strahle treffen, welche beide zugleich mit dem andern Doppelstrahle in einer Ebene liegen. Hieraus erkennen wir sofort den particulären Charakter unserer $C_{2d}^4$:

*Legt man in einem der Doppelpunkte der $C^4_{2d}$, welche das Erzeugniss projectivischer Strahlsysteme ist, die beiden Tangenten an die Curve, so schneiden sie diese noch in zwei Punkten, welche mit dem andern Doppelpunkte auf einer Geraden liegen.* [1])

Nehmen wir auf einer der Flächen $G^2$ einen Punkt P als Projectionscentrum, so wird von ihm aus die Fundamentalcurve $R^4$ in die ein für alle Mal festgelegte Projectionsebene E, welche nicht mehr jene Quadrupelebene, sondern eine allgemein liegende Ebene sein soll, als unsere $C^4_{2d}$ projicirt, welche das Erzeugniss projectivischer Strahlsysteme in allgemeiner Lage ist. Werden durch eine von P ausgehende Gerade g, welche im Allgemeinen mit $R^4$ keinen Punkt gemeinschaftlich hat, Tangentialebenen an die Raumcurve gelegt, so erscheinen diese in der Ebene E als Tangenten der $C^4_{2d}$, welche von einem Punkte p ausserhalb der Curve an dieselbe gezogen sind; p ist der Schnittpunkt von g und der Projectionsebene. Die Zahl der Tangentialebenen durch g an $R^4$ ist daher auch die der Tangenten von p an $C^4_{2d}$. Durch g können nun acht Tangentialebenen an $R^4$ gelegt werden. Denn einer Geraden g ist in Bezug auf ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung ein Polarhyperboloid $H^2$ zugeordnet; [2]) dieses schneidet die Raumcurve $R^4$ in acht Punkten, welche die Berührungspunkte der von g an die $R^4$ gelegten Tangentialebenen sind. Es entspricht nämlich der Geraden g eine durch einen Schnittpunkt A des Hyperboloids und der $R^4$ gehende Gerade g′ in Bezug auf eine ganz bestimmte Fläche $F^2$ des Büschels, dessen Basiscurve $R^4$ ist. A ist der Berührungspunkt einer durch g an $F^2$ gelegten Tangentialebene. Denn legt man durch g an $F^2$ irgend eine Tangentialebene, so ist ihr Berührungspunkt auch ihr Pol. Die Pole aller durch g gelegten Ebenen sollen aber

---

[1]) cfr. R. Heger, Zur Erzeugung von Curven vierter und dritter Ordnung durch zwei collineare Strahlsysteme. Schlömilch's Zeitschrift für Math. 1874.

[2]) Reye, Geometrie der Lage, II. p. 137. Hannover 1868.

auf g′ liegen; da nun g′ nur den Punkt A mit $F^2$ gemeinschaftlich hat, muss A der Berührungspunkt der durch g gelegten Tangentialebene sein. Ferner gehen alle Tangentialebenen, welche in einem Punkte P einer $R^4$ an alle durch diese Raumcurve gelegten Flächen $F^2$ construirt sind, durch die in P an $R^4$ gezogene Tangente; also geht auch die durch g und A gelegte Ebene durch die in A an $R^4$ gezogene Tangente, d. h. ist Tangentialebene von g an $R^4$. Da es nun acht Punkte A giebt, so haben wir das Resultat:

*An die ebene Curve $C^4_{2d}$ (vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, welche das Erzeugniss zweier projectivischen Strahlsysteme ist,) können von jedem Punkte ausserhalb derselben acht Tangenten gelegt werden. Die Curve $C^4_{2d}$ ist daher von der achten Klasse.*

Zu einer Verbindungslinie des Punktes P mit irgend einem Punkte P′ der $R^4$ gehört ein Polarhyperboloid, welches in P′ die Raumcurve berührt, da es die Gerade enthält, welche P′ entspricht und daher Tangente in P′ an $R^4$ ist. Folglich hat $R^4$ mit diesem Hyperboloid nur noch sechs Schnittpunkte; also gehen von PP′ nur sechs Tangentialebene an $R^4$. Hieraus folgt nach der Projection:

*Von jedem Punkte der $C^4_{2d}$ können sechs Tangenten an dieselbe gezogen werden.* [1])

Die durch das Projectionscentrum P und die acht Berührungspunkte A gelegten Flächen $F^2$, $F^2_1$ ... zweiter Ordnung, schneiden sich in einer Raumcurve $\mathfrak{R}^4$, welche durch P und die acht Punkte A geht. Von P aus projicirt wird sie eine ebene Curve $C^3$ dritter Ordnung, welche durch die Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ und die acht Berührungspunkte der von p an $C^4_{2d}$ gelegten Tangenten geht, d. h. sie wird die erste Polare von p in Bezug auf die $C^4_{2d}$.

[1]) Projicirt man $R^4$ von einem ihrer Punkte aus, so erhält man eine $C^3$. Hieraus folgt unmittelbar:

*Von einem beliebigen Punkte aus können im Allgemeinen sechs Tangenten an die ebene Curve dritter Ordnung gelegt werden.*

Dass die Projection der $\mathfrak{R}^4$ durch die Doppelpunkte geht, ergiebt sich aus Folgendem: Zieht man von P zwei Secanten a und $\alpha$ an $R^4$ und construirt die Fläche $F^2$ des Büschels $(\mathfrak{R}^4)$, welche von der durch die beiden Secanten bestimmten Ebene T in P berührt wird, so schneiden sich T und $F^2$ in den beiden Geraden a und $\alpha$, welche einen zerfallenden Kegelschnitt bilden. Auf jeder der beiden Geraden muss daher ausser P noch ein Punkt jeder anderen Fläche $F_1^2 \ldots$ des Büschels $(\mathfrak{R}^4)$ liegen.

Wenn wir die Gerade g um P in einer Ebene drehen, so bilden die Punkte p in der Projectionsebene eine gerade Punktreihe g; wir werden also die Eigenschaften der ersten Polaren der Punkte p einer Geraden g in Bezug auf eine $C_{2d}^4$ erkennen können, wenn wir die Lage der $\mathfrak{R}^4$ untersuchen, die jeder Lage der Geraden g entsprechen. Zunächst ist leicht ersichtlich, dass die Polarhyperboloide $H^4$, welche den Geraden g zugeordnet sind, die um einen Punkt P der Ebene E gedreht werden, ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung bilden. Durch jeden Punkt Q des Raumes geht entweder nur eine Fläche $H^2$ oder unendlich viele. Denn die Polarebenen von Q in Bezug auf alle Flächen des Büschels $(\mathfrak{R}^4)$ gehen durch eine Gerade; diese schneidet E in einem Punkte q. Verbindet man P mit q durch g', so entspricht dieser Geraden g' ein durch Q gehendes Polarhyperboloid $H_1^2$. Und nur dieser Geraden g'; denn soll irgend einer andern durch P gehenden Geraden g'' auch ein durch Q gehendes Polarhyperboloid entsprechen, so muss die Gerade, in der sich alle Polarebenen von Q in Bezug auf alle Flächen zweiter Ordnung des Büschels $(\mathfrak{R}^4)$ schneiden, die Gerade g'' treffen. Es werden also von dieser Geraden die Strahlen g' und g'' geschnitten, sie muss also in deren Ebene liegen, d. h. alle durch P gehenden Geraden g schneiden. Es gehen dann unendlich viele Hyperboloide durch Q. — Jedes der Polarhyperboloide $H^2$ dieses Büschels $(H^2H_1^2)$ schneidet auf der Fundamentalcurve $R^4$ je acht Punkte A ab. Wenn man durch P und jedes System von acht Punkten A je eine $\mathfrak{R}^4$

legt und diese projicirt, so erhält man die Polaren der Punkte der Geraden g.

Zu berücksichtigen ist noch die Möglichkeit, dass keiner der Punkte A, in denen $H^2$ die Raumcurve $R^4$ schneidet, reell ist, In diesem Falle hat man folgenden Ausweg: Je ein Polarhyperboloid $H^2$ und irgend zwei Flächen des Büschels $(\mathfrak{R}^4)$ bestimmen ein Netz von Flächen zweiter Ordnung. Man construire nun die Flächen dieses Netzes, welche durch den Punkt P gehen; diese Construction ist stets reell ausführbar, da es unter allen Flächen des Büschels durch $R^4$ auch solche giebt, welche $H^2$ in einer reellen Curve schneiden. Um diese zu erhalten, braucht man nur durch einen reellen Punkt von $H^2$ und durch $R^4$ eine Fläche zweiter Ordnung zu legen. Durch die auf diese Weise erhaltene Curve vierter Ordnung und durch P kann man dann die Flächen zweiter Ordnung legen, die sich in der gesuchten $\mathfrak{R}^4$ schneiden, welche immer reell ist, da ein Punkt derselben reell ist.

Um die Lage der Raumcurven $\mathfrak{R}^4$ zu einander und die ihrer Projectionen $C^3$ zu erkennen, müssen wir folgenden Hilfssatz einschalten:

> *Schneidet ein Büschel $(H^2H_1^2)$ von Flächen zweiter Ordnung auf einer Raumcurve $R^4$ vierter Ordnung und erster Species die Systeme $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$... von acht Punkten ab, und legt man durch acht Punkte $(A_1)$ eine Fläche $F_1^2$ und durch acht Punkte $(A_2)$ eine andere Fläche $F_2^2$ zweiter Ordnung, so schneidet das Büschel $(F_1^2F_2^2)$ auf $R^4$ dieselben Systeme $(A)$ von acht Punkten ab, wie das erste Büschel $(H^2H_1^2)$.*

Zum Beweise setzen wir die Flächenbüschel $(H^2H_1^2)$ und $(H^2F_1^2)$ in der Weise in projectivische Beziehung zu einander, dass die Fläche $H^2$ sich selbst conjugirt ist, der Fläche $H_1^2$ aber die Fläche $F_2^2$ entspricht, wobei $H_1^2$ auf $R^4$ das System $(A_2)$ abschneiden mag; ist ferner Q ein beliebiger Punkt von $R^4$, so mögen sich schliesslich noch diejenigen Flächen der beiden Büschel entsprechen, welche durch diesen Punkt Q

hindurch gehen. Dann ist die projectivische Beziehung der beiden Flächenbüschel hergestellt. Sie erzeugen nun eine Fläche $F^4$ vierter Ordnung; denn auf jeder Geraden werden durch sie zwei projectivische Punktsysteme (Involutionen) abgeschnitten. Es ist aber $H^2$ ein Theil dieser Fläche $F^4$; diese muss daher noch aus einer andern Fläche $F^2$ zweiter Ordnung bestehen. Mit dieser $F^2$ hat $R^4$ offenbar neun Punkte gemeinschaftlich, nämlich die acht Punkte $(A_2)$ und den Punkt Q. Die Raumcurve $R^4$ muss also ganz auf $F^2$ liegen. Folglich, wenn irgend eine dem Büschel $(H^2H_1^2)$ angehörige Fläche die $R^4$ in einem System $(A_2)$ schneidet, so muss $R^4$ von der entsprechenden Fläche des Büschels $(H^2F_2^2)$ in denselben Punkten $(A_2)$ getroffen werden. Die Flächenbüschel $(H^2F_2^2)$ und $(H^2H_1^2)$ schneiden also auf $R^4$ dieselben Systeme (A) von acht Punkten ab. Hieraus folgt nun unmittelbar, dass auch die Büschel $(H^2F_2^2)$ und $(F_1^2F_2^2)$ dieselben Systeme von acht Punkten auf $R^4$ abschneiden; also endlich auch $(F_1^2F_2^2)$ und $(H^2H_1^2)$. q. e. d.

Schneidet das Büschel $(H^2H_1^2)$ von Polarhyperboloiden auf $R^4$ die Systeme (A) von acht Punkten ab, und sind $F_1^2$ und $F_2^2$ irgend zwei durch das Projectionscentrum P und die Systeme $(A_1)$ resp. $(A_2)$ gelegte Flächen zweiter Ordnung, so schneidet das Büschel $(F_1^2F_2^2)$ nach dem vorangeschickten Hilfssatze dieselben Systeme (A) auf $R^4$ ab, wie $(H^2H_1^2)$. Auf den Flächen des Büschels $(F_1^2F_2^2)$ liegen also auch alle $\mathfrak{R}^4$, welche durch P und je acht Punkte gehen, die von einer Fläche $H^2$ auf $R^4$ ausgeschnitten werden. Die gemeinschaftlichen Punkte dieser Raumcurven $\mathfrak{R}^4$ liegen daher auf der Basiscurve $r^4$ des Büschels $(F_1^2F_2^2)$. Ferner liegen die $\mathfrak{R}^4$ auch auf der durch P und $R^4$ gehenden Fläche $\mathfrak{F}^2$; also sind die Schnittpunkte von $r^4$ und $\mathfrak{F}^2$ die gemeinschaftlichen Punkte aller $\mathfrak{R}^4$, d. h. ausser P noch sieben Punkte. Die Projectionen $C^3$ von $R^4$ schneiden sich daher auch ausser in den beiden Doppelpunkten noch in sieben Punkten. Also haben wir das Resultat:

*Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden in Bezug auf eine $C_{2d}^4$ bilden ein Büschel von Curven*

*$C^3$ dritter Ordnung, welche durch die beiden Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ und ausserdem noch durch sieben feste Punkte gehen.*

Der Gesammtheit von Geraden, welche durch P gezogen werden können, entspricht in Bezug auf das Flächenbüschel, dessen Basiscurve $R^4$ ist, ein Netz von Polarhyperboloiden; denn die Flächen desselben, welche durch einen Punkt Q gehen, bilden ein Büschel. Verbindet man nämlich die dem Punkte Q entsprechende Gerade q mit P durch eine Ebene $\mathfrak{E}$, so entspricht jeder durch P in $\mathfrak{E}$ gezogenen Geraden g ein durch Q gehendes Polarhyperboloid. Und keiner andern durch P gehenden Geraden, die nicht zugleich $\mathfrak{E}$ vollständig angehört, kann ein durch Q gehendes Polarhyperboloid entsprechen. Denn würde irgend einer andern die Ebene $\mathfrak{E}$ in P treffenden Geraden g′ auch ein durch Q gehendes Polarhyperboloid zugeordnet sein, so müsste die Gerade q, in der sich alle Polarebenen von Q schneiden, die Gerade q′ treffen, was ja unmöglich ist. [1])

Die Hyperboloide $H^2$, welche das Netz $[H^2]$ bilden, schneiden auf der durch P und $R^4$ gehenden Fläche $F^2$ ein Netz von Raumcurven vierter Ordnung ab. Jede derselben trifft die $R^4$ in einem System von acht Punkten (A), die mit P verbunden ja eine $\mathfrak{R}^4$ geben. Dieses Netz $[\mathfrak{R}^4]$ in die Ebene projicirt ergiebt ein Netz $[C^3]$ von Curven dritter Ordnung, welche sämmtlich durch die beiden Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ gehen, d. h.:

*Die ersten Polaren aller Punkte der Ebene bilden in Bezug auf die $C^4_{2d}$ ein Netz von Curven $C^3$ dritter Ordnung, welche sämmtlich durch die beiden Doppelpunkte der Fundamentalcurve gehen.*

In einem solchen Netze hat die Hesse'sche Curve eine

[1]) Dass der Gesammtheit der durch P gehenden Geraden ein Netz von Polarhyperboloiden zugehört, folgt auch daraus, dass diese $H^2$ ausser der dem Punkte P entsprechenden Geraden die Quadrupelpunkte des Flächenbüschels ($R^4$) gemeinschaftlich haben.

bekannte Eigenschaft; [1]) diese gilt also auch für die Hessesche unserer $C^4_{2d}$ und lautet dann:

*Die Hesse'sche Curve $H^6$ der $C^4_{2d}$ hat in jedem der beiden Doppelpunkte der Fundamentalcurve selbst einen Doppelpunkt und in diesen mit denjenigen ersten Polaren die Tangenten gemeinschaftlich, für welche die Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ selbst Doppelpunkte sind.*

Dieses Resultat führt auf eine Eigenthümlichkeit des Netzes von Raumcurven $R^4$. Die beiden von P ausgehenden Projectionsstrahlen, welche die Doppelpunkte der $C^4_{2d}$ liefern, sind Secanten der $\mathfrak{R}^4$, treffen diese also je in zwei Punkten resp. $a\alpha$, $a_1\alpha_1$. Das Polarhyperboloid $H^2$, welches der Geraden $Pa\alpha$ entspricht, berührt in a und $\alpha$ die $R^4$, trifft diese Raumcurve daher nur noch in vier Punkten, welche die Berührungspunkte der von $Pa\alpha$ an $R^4$ gelegten Tangentialebenen sind. Die der Geraden $Pa\alpha$ zugehörige $\mathfrak{R}^4$ ist daher bestimmt durch P, die vier Schnittpunkte und die beiden Berührungspunkte a und $\alpha$ der $R^4$ und $H^2$; sie zerfällt also in eine Gerade und eine Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ dritter Ordnung. Nun liegen aber die sämmtlichen $\mathfrak{R}^4$ auf der durch P und $R^4$ bestimmten Fläche $\mathfrak{F}^2$, also liegen auch die beiden Geraden $Pa\alpha$ und $Pa_1\alpha_1$ auf dieser Fläche, so dass wir folgendes Resultat haben:

*In dem Netze [$\mathfrak{R}^4$] von Raumcurven vierter Ordnung, welche alle auf einer Fläche $\mathfrak{F}^2$ zweiter Ordnung liegen und sich in einem Punkte P derselben schneiden, giebt es zwei Curven, welche in eine Gerade und eine Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ dritter Ordnung zerfallen; und zwar sind diese beiden Geraden diejenigen Generatrixen der Fläche $\mathfrak{F}^2$, welche sich in dem allen $\mathfrak{R}^4$ gemeinsamen Punkte P schneiden.*

---

[1]) cfr. Cremona, Ebene Curven, No. 96.

# Lebenslauf.

Ich, Georg Zickerow, Sohn des 1856 verstorbenen Kaufmanns Rudolf Zickerow, bin am 25. Juni 1853 zu Stettin geboren; ev. Confession. Nachdem ich bis Quinta auf der Realschule zu Frankfurt a. O. vorgebildet war, trat ich 1864 in das Friedrichs-Gymnasium daselbst ein und erlangte Ostern 1873 die Maturität. Alsbald bezog ich die hiesige Universität, um mich mathematischen und philosophischen Studien zu widmen; ich hörte Vorlesungen der Herren Bachmann, F. Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Krause, Loewig, O. E. Meyer, C. Neumann, Pernet, Poleck, Roemer, Rosanes, Schröter, Weber.

Während drei Semester war ich Mitglied des von Herrn Prof. Schröter geleiteten mathematischen Seminar; ein Semester hindurch nahm ich Theil an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes und vier Semester an den philosophischen des Herrn Prof. Dilthey.

Auch an dieser Stelle sei es mir erlaubt, allen den oben genannten Herren, zu deren Schülern ich mich zählen darf, für den mir ertheilten Unterricht meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen, insbesondere aber Herrn Prof. Schröter, dessen freundlicher Anregung auch diese Arbeit ihre Entstehung verdankt.

# Thesen.

1. Es ist nicht zu billigen, dass geometrische Untersuchungen auf die Geometrie der Dimension, welcher ein der Betrachtung zu Grunde gelegtes Problem angehört, beschränkt werden.
2. Bei synthetischer Behandlung eines Problems ist die analytische principiell nicht auszuschliessen, sondern oft mit Vortheil zu verwerthen.
3. Die Trennung der Mechanik in Statik und Dynamik lässt sich nicht aufrecht erhalten.
4. Die mathematische Physik hat bisher keine allgemein giltige Definition der Constitution der Materie gegeben.